Διαδικασία Bernoulli: Οι αφίξεις συμβαίνουν σε διακριτό χρόνο και οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν γεωμετρική κατανομή.

Αριθμός αφίξεων σε κάποιο προκαθορισμένο χρονικό διάστημα:

- Διωνυμική με παραμέτρους p, n: Εκφράζει το συνολικό αριθμό των επιτυχιών k σε n ανεξάρτητες δοκιμές:

$S = X_1 + X_2 + \dots X_n$

$P_S(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$

$E[S] = n \cdot p$, $var(S) = n \cdot p(1-p)$

Χρόνος μέχρι την πρώτη άφιξη:

- Γεωμετρική με παράμετρο p: Εκφράζει τον αριθμό των δοκιμών T ως και την πρώτη επιτυχία.

$P_T(t) = (1-p)^{t-1} \cdot p$, $t = 1, 2, \dots$

$E[T] = 1/p$, $var(T) = \dfrac{1-p}{p^2}$

Χρόνοι μεταξύ των αφίξεων - Χρόνος k-στης άφιξης

τ.μ. Y_k: ο χρόνος της k-στης επιτυχίας

τ.μ. T_k: ο k-στος χρόνος μεταξύ των αφίξεων - αντιπροσωπεύει τον αριθμό των δοκιμών μετά την (k-1)-στη επιτυχία ως την επόμενη επιτυχία. Έτσι: $T_1 = Y_1$, $T_k = Y_k - Y_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$

$Y_k = T_1 + T_2 + \dots T_k$: αριθμός δοκιμών ως την k-στη επιτυχία

Οι T_k είναι ανεξάρτητες, γεωμετρικά κατανεμημένες τ.μ. με την ίδια παράμετρο p. Άρα για την $Y_k = T_1 + T_2 + \dots T_k$ έχουμε:

- $E[Y_k] = E[T_1] + E[T_2] + \dots + E[T_k] = \dfrac{k}{p}$
- $var(Y_k) = var(T_1) + var(T_2) + \dots + var(T_k) = \dfrac{k(1-p)}{p^2}$
- $P_{Y_k}(t) = \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}$, $t = k, k+1, \dots$ ~ Pascal τάξης k

Διαδικασία Poisson: Οι αφίξεις συμβαίνουν σε συνεχή χρόνο και οι χρόνοι μεταξύ των αφίξεων ακολουθούν εκθετική κατανομή.

Αριθμός αφίξεων σε χρονικό διάστημα μήκους τ

- Poisson με παράμετρο $\lambda\tau$: Εκφράζει το συνολικό αριθμό των αφίξεων σε διάστημα μήκους τ.

$P_{N_\tau}(k) = P(k, \tau) = \dfrac{(\lambda\tau)^k e^{-\lambda\tau}}{k!}$, $k = 0, 1, 2 \dots$

$E[N_\tau] = \lambda\tau$, $var(N_\tau) = \lambda\tau$

Χρόνος μέχρι την 1η άφιξη

- Εκθετική με παράμετρο λ

$p_T(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$

$E[T] = \dfrac{1}{\lambda}$, $var(T) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

Χρόνος k-στης άφιξης

Η τ.μ. $Y_k = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ εκφράζεται ως το άθροισμα k ανεξάρτητων εκθετικά κατανεμημένων τ.μ.

- $E[Y_k] = E[T_1] + E[T_2] + \dots E[T_k] = \dfrac{k}{\lambda}$
- $var(Y_k) = var(T_1) + var(T_2) + \dots var(T_k) = \dfrac{k}{\lambda^2}$
- $f_{Y_k}(y) = \dfrac{\lambda^k \cdot y^{k-1} \cdot e^{-\lambda y}}{(k-1)!}$ ~ Erlang τάξης k

Άθροισμα ανεξάρτητων Poisson τ.μ.

$M \sim Poisson(\mu)$

$N \sim Poisson(\nu)$

$(M+N) \sim Poisson(\mu + \nu)$

Διαδικασία Bernoulli (συνέχεια)

Η κατανομή Pascal απαντά σε ερωτήματα του τύπου
P(k-στής επιτυχίας στη δοκιμή t)

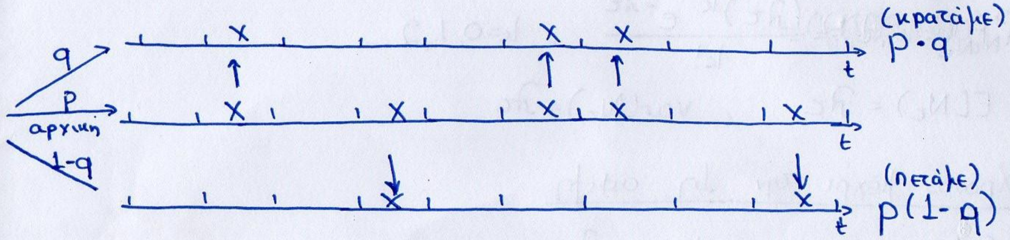
↳ αριθμός δοκιμής

$$P_{Y_k}(t) = \binom{t-1}{k-1} p^k (1-p)^{t-k}$$

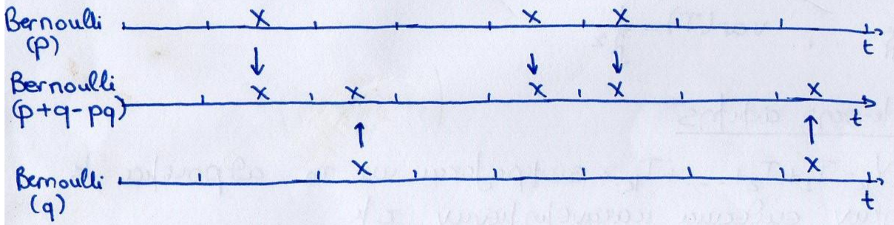
↳ αριθμός επιτυχίας

$$P\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Διαίρεση σ.δ. Bernoulli:



Συγκερασμός σ.δ. Bernoulli:



Poison προσέγγιση διωνυμικής:

Η Poisson τ.μ. με παράμετρο λ παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές με πιθανότητα:

$$P_Z(k) = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\dots$$

$E[Z]=\lambda$, $var(Z)=\lambda$

Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k, η διωνυμική πιθανότητα

$$P_{Y_k}(t) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\, p^k (1-p)^{n-k}$$

συγκλίνει στο $P_Z(k)$, για $n\to\infty$ με $p=\frac{\lambda}{n}$ κρατώντας το λ σταθερό.

Γενικά η προσέγγιση είναι καλή όταν $\lambda=n\cdot p$ με n πολύ μεγάλο και p πολύ μικρό.

Διαδικασία Poisson (συνέχεια)

Διαίρεση σ.δ. Poisson: Όποτε υπάρχει άφιξη την κρατάμε με πιθανότητα p και την πετάμε με πιθανότητα (1-p). Έτσι τελικά έχουμε δύο σ.δ. Poisson με εντάσεις λp και $\lambda(1-p)$

Συγχώνευση σ.δ. Poisson: Αρχίζουμε με δύο ανεξάρτητες σ.δ. Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 και τις συγχωνεύουμε καταγράφοντας μια άφιξη όποτε έχουμε άφιξη σε μία από τις 2 σ.δ. Η σ.δ. που προκύπτει είναι Poisson με ρυθμό $\lambda_1+\lambda_2$.
Επίσης:

$$P(\text{άφιξη από "}\lambda_1\text{"} \mid 1 \text{ άφιξη}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$P(\text{άφιξη από "}\lambda_2\text{"} \mid 1 \text{ άφιξη}) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Γενίκευση: Η συνολική σ.δ. αφίξεων που προκύπτει από τη συγχώνευση των αφίξεων "n" ανεξάρτητων σ.δ. Poisson με ρυθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ είναι Poisson με ρυθμό $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n$

Τυχαία εμφάνιση σε μια σ.δ. Poisson: Αν και τα χρονικά διαστήματα μεταξύ διαδοχικών αφίξεων έχουν μέση διάρκεια $\frac{1}{\lambda}$ μονάδες χρόνου, ένας παρατηρητής που φτάνει σε μια αυθαίρετη χρονική στιγμή είναι πιο πιθανό να πέσει σε ένα μεγάλο τέτοιο διάστημα παρά σε ένα μικρό. Ως συνέπεια, η μέση διάρκεια του διαστήματος που βλέπει ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερη, δηλαδή $\frac{2}{\lambda}$.